

Zadání 2. seminární práce z předmětu
Matematický software (KI/MSW)

Vyučující: doc. RNDr. Zbyšek Posel, Ph.D.

Informace

- Seminární práce se skládá z **programové** části a **textové** části.
- Programová část obsahuje kódy v jazyce Python.
- Textová část je protokol o vypracování a minimálně obsahuje:
 - Zadání
 - Postup řešení, zjednodušenou verzi programu nebo vývojový diagram a rovnice.
 - Výsledky (grafy, tabulky, obrázky). Všechny grafy budou mít popsání osy a legendu.
 - Slovní zhodnocení výsledků, diskuze a závěr.
 - Literaturu.
- Na programové části je povolena spolupráce.
- Protokol odevzdá každý sám za sebe (lze ve formě Jupyter notebooků).
- Seminární práci posílejte na Zbysek.Posel@ujep.cz.
- **Seminární práci lze odevzdat nejpozději dne 4. 7. 2026.** Po tomto datu nebudou již žádné práce ani jejich opravy přijímány.

Šíření nemoci - SIR model

Pro modelování šíření nemoci v populaci o N členech zanedbáváme ty faktory populace, které nejsou pro vývoj a šíření nemoci zásadní. Populaci dělíme na 3 skupiny:

- $S(t)$ - Ti, co nejsou nakaženi, ale mohou se jimi stát kontaktem s infikovanou osobou.
- $I(t)$ - Ti, co jsou nakaženi a mohou nakazit i členy skupiny $S(t)$. V $t = 0$ bude počet těchto členů malý a bude růst, protože například lidé nejsou o nemoci informováni nebo nejsou tak opatrní.
- $R(t)$ - Ti, co se z nemoci vyléčili a už nemůžou být nakaženi nebo jsou nakaženi a v karanténě nebo zemřeli.

Celkový počet členů populace je konstantní a platí

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (1)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0 \quad (2)$$

Přechod mezi jednotlivými skupinami je zohledněn v následujících rovnicích:

- (a) Časový vývoj skupiny potenciálně nakažených $S(t)$ v závislosti na kontaktu se skupinou nakažených $I(t)$ je vyjádřen jako časový úbytek počtu členů skupiny $S(t)$

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \quad (3)$$

Koeficient β vyjadřuje míru přenosu mezi jednotlivými skupinami.

- (b) Časový vývoj skupiny nakažených $I(t)$ v závislosti na kontaktu se členy skupiny $S(t)$ (přírůstek) a přechodem do skupiny $R(t)$ (úbytek vyléčením, karanténou nebo úmrtím):

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (4)$$

Koeficient γ vyjadřuje míru přenosu mezi skupinou nakažených a vyléčených.

- (c) Časový vývoj skupiny vyléčených (+ karanténa a úmrtí) je vyjádřen jako přírůstek členů skupiny:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (5)$$

Rovnice 3, 4 a 5 tvoří spolu s podmínkami 1 a 2 soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu. Rovnice představují uzavřenou soustavu, kde neuvažujeme přírůstek a pokles populace narozením resp. úmrtím nebo migrací.

Počáteční podmínky

Na počátku šíření nemoci $t = t_0 = 0$ jsou počty ve skupinách rozděleny následovně. Velký počet členů populace je ve skupině $S(t)$, potenciálně nakažených. Naopak malý počet je ve skupině již nakažených $I(t)$. Ve skupině vyléčených, v karanténě nebo zemřelých $R(t)$ není na počátku šíření nemoci nikdo. Počáteční podmínky lze shrnout

$$S(t_0) = S_0 \gg 0$$

$$I(t_0) = I_0 > 0$$

$$R(t_0) = R_0 = 0$$

Vlastnosti SIR modelu a jeho použití

Výhody modelu jsou:

- Základní model pro šíření nemocí v uzavřené skupině. Byl použit pro modelování vývoje např. nemoci SARS, H1N1 a jiné.
- Model s konstantním počtem členů lze velice dobře použít pro modelování krátkodobých událostí.
- Model je relativně jednoduchý. Každý člen populace projde vývojem: potenciálně nakažený \rightarrow nakažený \rightarrow vyléčený.

Nevýhody tohoto modelu jsou:

- Koeficienty β a γ jsou konstantní v čase. Například je těžké modelovat sezónní nemoci.
- Populace není vnitřně rozdělena na dospělé a děti. Je těžké modelovat ty dětské nemoci, kdy se nakazí např. každý desátý dospělý.
- SIR model neumožňuje sledovat vývoj jiné populace, např. přenašeče nemocí jako jsou komáři (malárie) nebo klíšťata.
- SIR model je uzavřený, neuvažuje migraci.

Zadání práce

Pomocí vlastního programu vyřešte následující soustavu rovnic, která modeluje vývoj nemoci v uzavřené populaci o $N = 50$ členech.

- Uvažujte SIR model s následujícími rovnicemi a podmínkami.

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t)\end{aligned}$$

a podmínkami

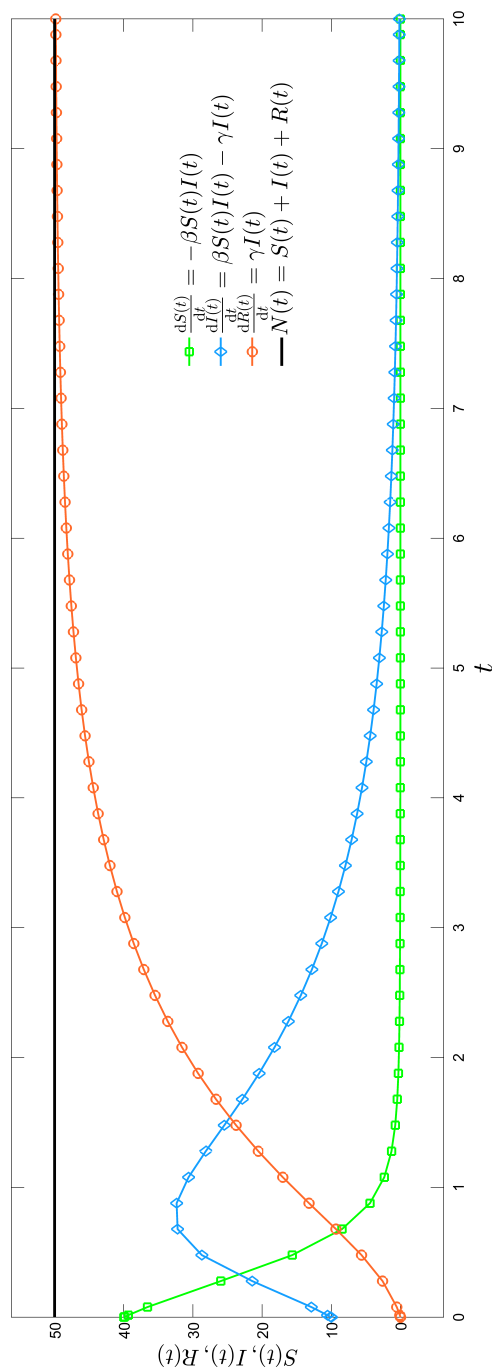
$$\begin{aligned}S(t) + I(t) + R(t) &= N \\ \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} &= 0\end{aligned}$$

- Ukažte vliv počátečních podmínek na časový vývoj jednotlivých skupin.
- Ukažte vliv koeficientů β a γ na časový vývoj jednotlivých skupin.
- Ukažte vliv metody řešení soustavy rovnic na přesnost řešení. Za metody zvolte Eulerovu metodu.

Výstupem bude:

- Grafické zobrazení průběhu nemoci, alespoň pro 3 skupiny parametrů. Např. pro případ malého nebo velkého počtu nakažených na počátku, při různých velikostech koeficientů β a γ .

Příklad formátovaného grafického výstupu



Obrázek 1: Výsledek SIR modelu pro šíření nemoci v populaci o velikosti $N = 50$ členů. Počáteční podmínky modelu jsou $S_0 = 40$, $I_0 = 10$ a $R_0 = 0$.