

# Analýza a vizualizace dat v Matlabu

Frekvenční analýza signálu – Fourierova transformace

Signal Processing Toolbox, Matlab R2013a

RNDr. Zbyšek Posel, Ph.D.

Katedra informatiky, PŘF, UJEP

# Obsah

- Fourierova transformace
  - Od Fourierovy řady k Fourierově transformaci
  - Diskrétní Fourierova transformace
  - Příklad na diskrétní transformaci

# Od Fourierovy řady k transformaci

$$s(t) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) \, dt$$

**Koeficienty  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  postupně dosadím do Fourierovy řady.**

# Od Fourierovy řady k transformaci

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = F^{-1}\{S(\omega)\}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt = F\{s(t)\}$$

- $F\{s(t)\}$  - Fourierova transformace
- $F^{-1}\{S(\omega)\}$  - zpětná Fourierova transformace

# Diskrétní Fourierova transformace

- Funkce  $s(t)$  nabývá pouze diskrétních hodnot podle počtu měření  $N$

$$\{s_n\}_{n=0}^{N-1}$$

- Pomocí Fourierovy transformace  $F\{s(t)\}$  pro diskrétní funkci získám **maximálně**  $N$  hodnot spektra.

$$\{\overline{S_k}\}_{k=0}^{N-1}$$

# Diskrétní Fourierova transformace

- Pomocí Fourierovy transformace  $F\{s(t)\}$  pro diskrétní funkci získám **maximálně**  $N$  hodnot spektra.

$$\{s_n\}_{n=0}^{N-1} \rightarrow \{\overline{S_k}\}_{k=0}^{N-1}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt = F\{s(t)\} \rightarrow \overline{S_k} = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$
$$f = \frac{n}{N}$$

# Diskrétní Fourierova transformace – maticový zápis

$$\{s_n\}_{n=0}^{N-1} \rightarrow \{\overline{S_k}\}_{k=0}^{N-1} \quad \overline{S_k} = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\begin{array}{lll} k = 0 & \overline{S_0} = & s_0 e^{-i2\pi\frac{0\cdot 0}{N}} + s_1 e^{-i2\pi\frac{0\cdot 1}{N}} + \dots s_{N-1} e^{-i2\pi\frac{0\cdot N-1}{N}} \\ k = 1 & \overline{S_1} = & s_1 e^{-i2\pi\frac{1\cdot 0}{N}} + s_1 e^{-i2\pi\frac{1\cdot 1}{N}} + \dots s_{N-1} e^{-i2\pi\frac{1\cdot N-1}{N}} \\ k = 2 & \overline{S_2} = & s_2 e^{-i2\pi\frac{2\cdot 0}{N}} + s_1 e^{-i2\pi\frac{2\cdot 1}{N}} + \dots s_{N-1} e^{-i2\pi\frac{2\cdot N-1}{N}} \end{array}$$

$$W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$$

# Diskrétní Fourierova transformace – maticový zápis

$$\{s_n\}_{n=0}^{N-1} \rightarrow \{\overline{S_k}\}_{k=0}^{N-1} \quad \overline{S_k} = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{S_0} \\ \overline{S_1} \\ \overline{S_2} \\ \vdots \\ \overline{S_{N-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{N-2} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{N-2} & W^{N-3} & \dots & W^{N-N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{N-1} \end{pmatrix}$$



# Diskrétní Fourierova transformace – příklad

- Proved'te Fourierovu transformaci signálu  $s(t)$ .

$$s(t) = 5 + \underbrace{2 \cos(2\pi t - 90^\circ)}_{1\text{Hz}} + \underbrace{3 \cos(4\pi t)}_{2\text{Hz}}$$

- Vzorkovací frekvence  $f_{vz} = 4\text{Hz}$ ,  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{4}$
- Mějme celkem 4 vzorky  $t = \{0T, 1T, 2T, 3T\} = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$

# Diskrétní Fourierova transformace – příklad

$$s(t) = 5 + \underbrace{2 \cos(2\pi t - 90^\circ)}_{1\text{Hz}} + \underbrace{3 \cos(4\pi t)}_{2\text{Hz}}, t = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}, T = \frac{1}{4}$$

$$s(0) = 5 + 2 \cos(2\pi 0 - 90) + 3 \cos(4\pi 0) = 5 + 3 = 8$$

$$s(1) = 5 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 90\right) + 3 \cos(\pi) = 5 + 2 - 3 = 4$$

$$s(2) = 5 + 2 \cos(\pi - 90) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5 + 3 = 8$$

$$s(3) = 5 + 2 \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 90\right) + 3 \cos(3\pi) = 5 - 2 - 3 = 0$$

# Diskrétní Fourierova transformace – příklad

$$\begin{pmatrix} \overline{S_0} \\ \overline{S_1} \\ \overline{S_2} \\ \vdots \\ \overline{S_{N-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{N-2} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{N-2} & W^{N-3} & \dots & W^{N-N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{S_0} \\ \overline{S_1} \\ \overline{S_2} \\ \overline{S_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$$

# Diskrétní Fourierova transformace – příklad

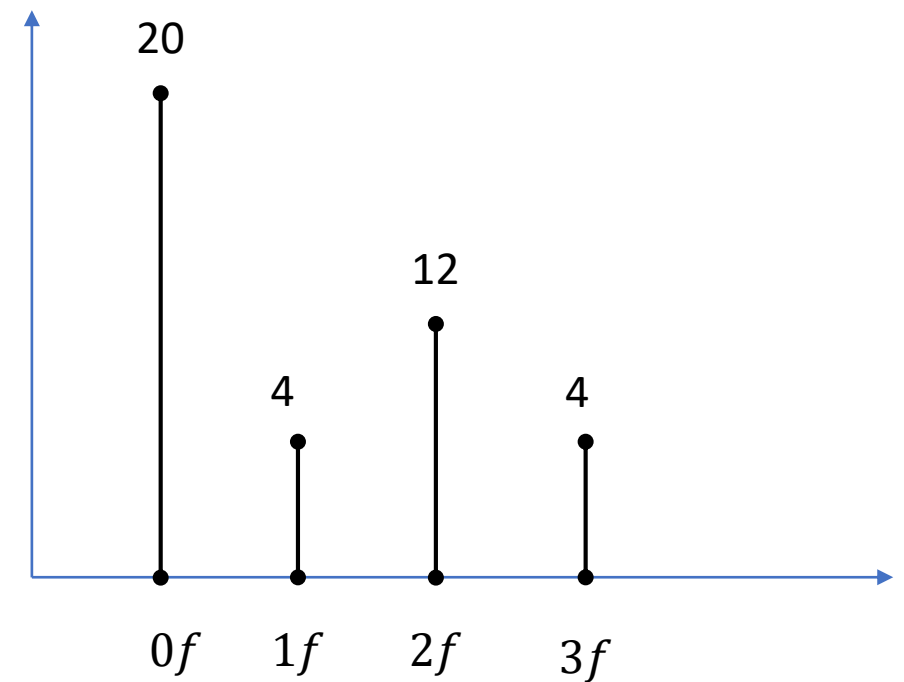
$$\begin{pmatrix} \overline{S_0} \\ \overline{S_1} \\ \overline{S_2} \\ \overline{S_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{S_0} \\ \overline{S_1} \\ \overline{S_2} \\ \overline{S_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \overline{S_k} = \{20, -4i, 12, 4i\}$$

# Diskrétní Fourierova transformace – příklad

$$\overline{S_k} = \{20, -4i, 12, 4i\}$$

- Výsledky
  - $0f$  – odpovídá situaci  $s(t) = 5$
  - $1f$  – odpovídá členu  $2 \cos(2\pi t - 90^\circ)$
  - $2f$  – odpovídá členu  $3 \cos(4\pi t)$
  - $3f$  – odpovídá složení členů



# Diskrétní Fourierova transformace – příklad samostudium

- Naprogramujte si příklad z prezentace
- Výsledek porovnejte s funkcí *fft* z Matlabu
- Naprogramujte si funkci s náhodným šumem
- $s(t) = A_0 \cos(2\pi f t) + \gamma, \gamma \in \{-0.5A_0, 0.5A_0\}$ 
  - Hodnotu  $\gamma$  vyberte náhodně
  - Pomocí diskrétní transformace se pokuste identifikovat frekvenci šumu
- Naprogramujte funkci se zcela náhodným šumem  
 $\gamma \in (0,1)$

# Literatura

- [1] Jiří Jan, *Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů*, VUT v Brně nakladatelství VUTIUM, 2002, ISBN 80-214-1558-4.
- [2] Jiří Krejsa, Základ zpracování signálu, [cit. 2019-01-17 ] , dostupné z: <https://docplayer.cz/24302145-Zaklady-zpracovani-signalu.html>.
- [3] Willard Miller, The Fourier Transform, [cit. 2019-01-17], dostupné z: <http://wwwusers.math.umn.edu/~mille003/fouriertransform.pdf>
- [4] [cit. 2019-01-17], Dostupné z: <http://apfyz.upol.cz/ucebnice/down/mini/fourtrans.pdf>.