Analýza a vizualizace dat v Matlabu

Frekvenční analýza signálu – Fourierova řada

Signal Processing Toolbox, Matlab R2013a

RNDr. Zbyšek Posel, Ph.D.

Katedra informatiky, PřF, UJEP

Obsah

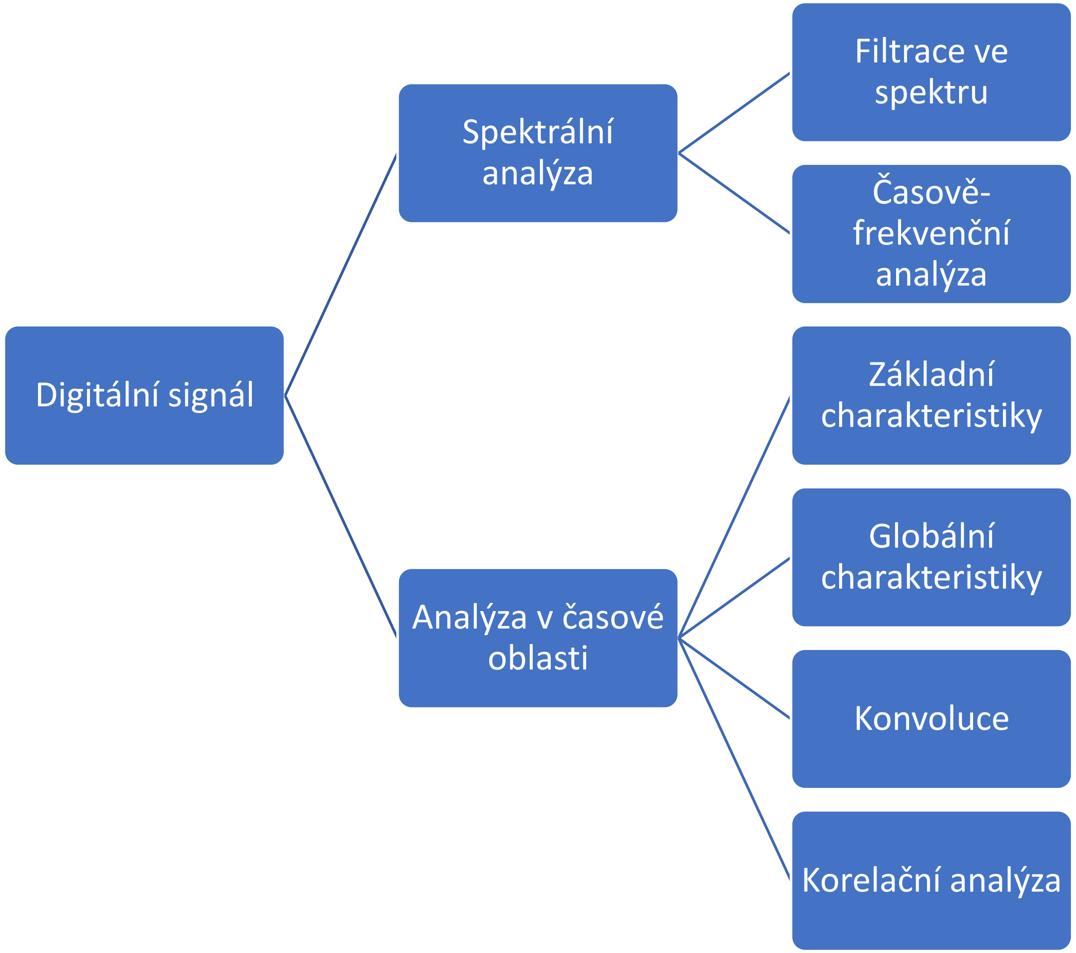
- Frekvenční analýza signálu
  - Frekvenční spektrum signálu
  - Rekonstrukce signálu a její omezení
  - Filtrace signálů

- Fourierova řada
  - Aproximace signálu $x(t)$
  - Koeficienty řady
  - Příklad

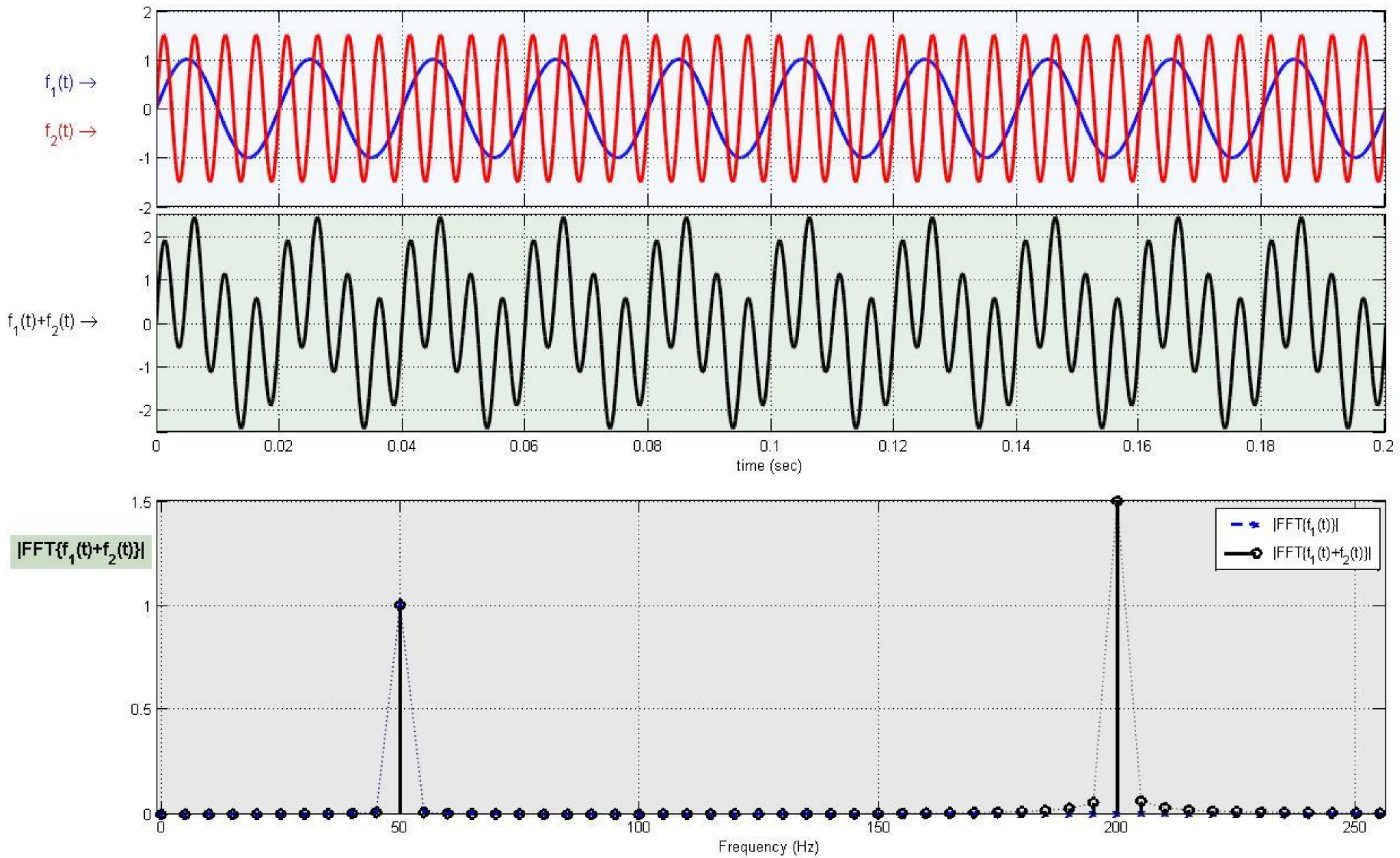
Více lze o těchto tématech nalézt v [1], [2], [3] a [4].

Frekvenční analýza signálu

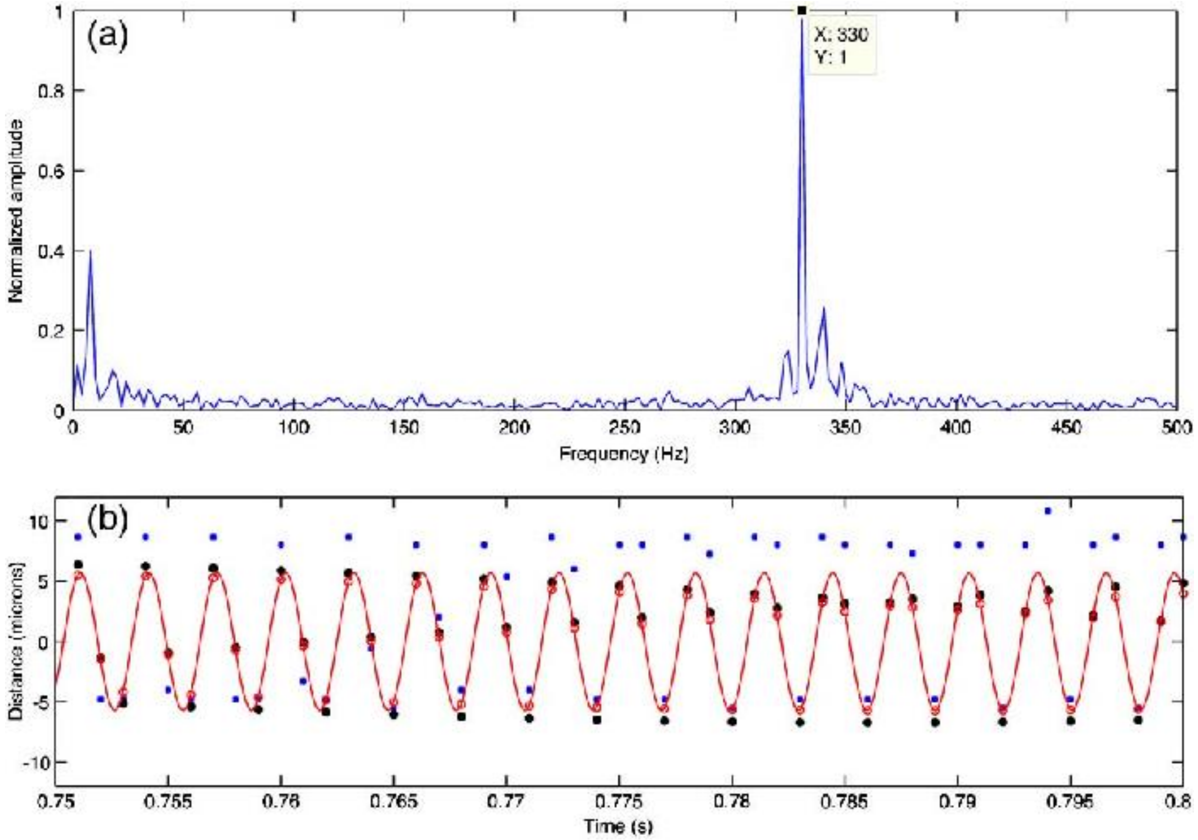
- Spektrum signálu
  - Všechny frekvence v signálu (vzorkování)
  - Zastoupení jednotlivých frekvencí určuje povahu signálu /jevu.
  - Jednoduché odstranění šumu
    - Vysokofrekvenční (dolní propusť)
    - Nízkofrekvenční (horní propusť)
    - Ve specifikované oblasti (pásmová propusť)
  - Rekonstrukce signálu ze znalosti frekvencí



Frekvenční analýza signálu - spektrum



Frekvenční analýza signálu - Rekonstrukce signálu

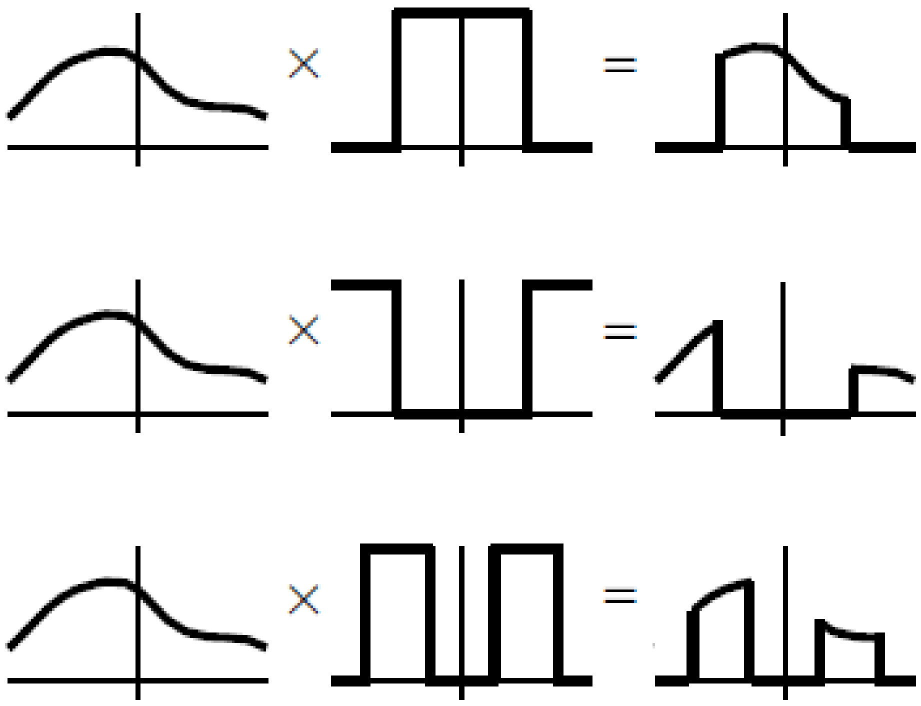


- Posun ve spektru
- Posun v čase
- Změna měřítka frekvence

Frekvenční analýza signálu – Filtrace signálu

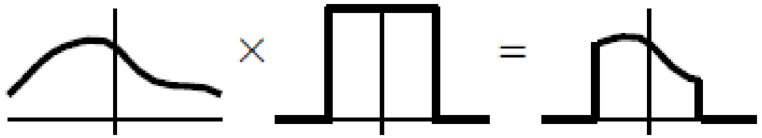
$$F(\omega) \times H(\omega) = F_{mod}(\omega)$$

- Dolní propusť (low-pass)
- Horní propusť (high-pass)
- Pásmová propusť (band-pass)

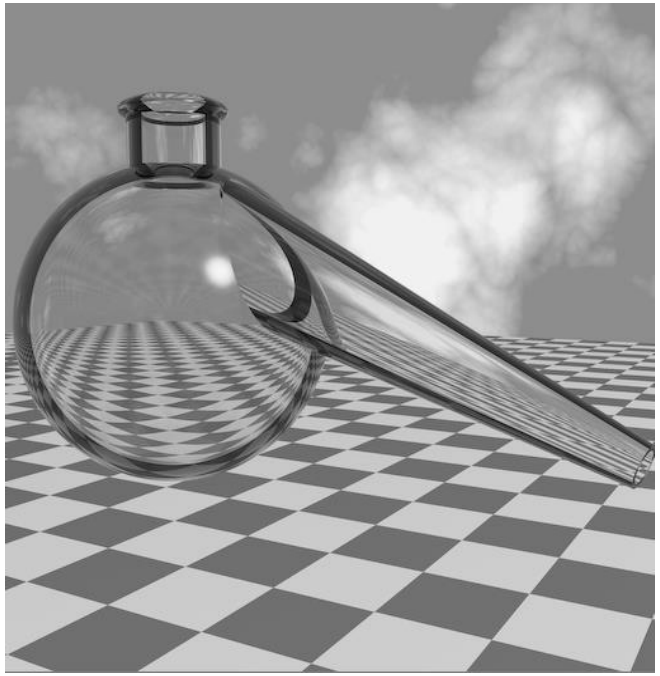


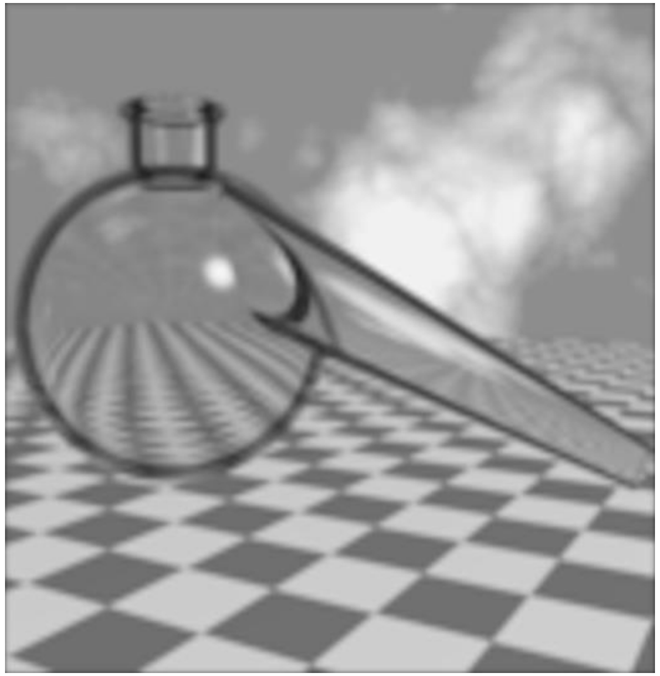
Frekvenční analýza signálu – Filtrace signálu

$$F(\omega) \times H(\omega) = F_{mod}(\omega)$$



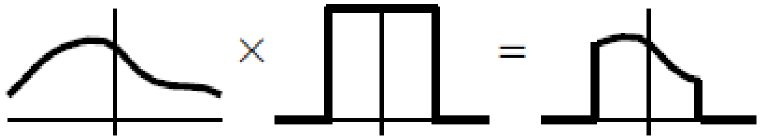
Vysoké frekvence – ostrá změna hodnot



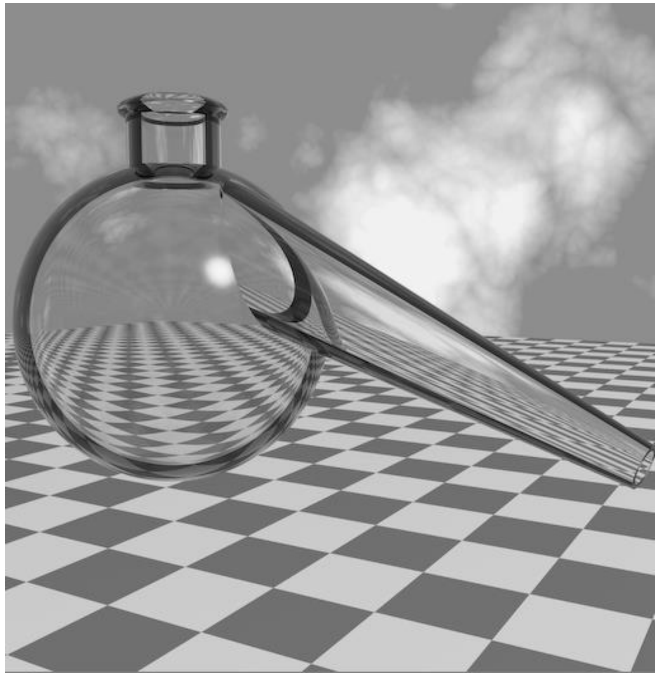


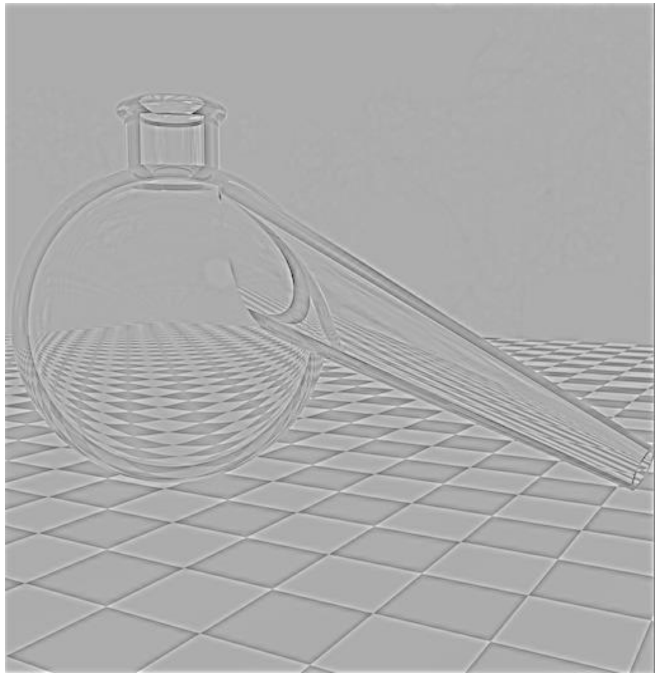
Frekvenční analýza signálu – Filtrace signálu

$$F(\omega) \times H(\omega) = F_{mod}(\omega)$$



Nízké frekvence – stejné hodnoty





Fourierova řada

*Jakákoli **periodická funkce** může být rozložena do **řady** sinů a kosinů **celočíselných násobků** nezávislé proměnné.*

Jean Baptiste Joseph Fourier 1822

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)], \qquad t \in (-\pi, \pi)$$

- Aproximace funkce $f(t)$ Fourierovou řadou
  - Koeficienty a_0, a_n, b_n.
  - Funkci pro měření kvality aproximace (rozptyl, nejmenší čtverce,..).
  - Počet členů řady n.

Fourierova řada – koeficient a_0

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)]\right]\mathrm{d}t$$

- Koeficient a_0 při $n = 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\ \mathrm{d}t = -\cos(\pi) + \cos(-\pi) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\ \mathrm{d}t = \sin(\pi) - \sin(-\pi) = 0$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t}$$

Fourierova řada – koeficienty a_n, b_n

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)] \right] \mathrm{d}t$$

- Naznačení řešení ($n > 1$)

Obě strany rovnice vynásobíme $\cos(mt)$, $m > 1$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t = 0$ pro všechna m, n

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

Fourierova řada – koeficienty a_0, a_n, b_n

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)], \qquad t \in (-\pi, \pi)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \; \mathrm{d}t$$

n není počet vzorků funkce $f(t)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}t$$

Fourierova řada - příklad

- Pomocí Fourierovy řady aproximujte průběh funkce:

$$f(t) = t, \qquad t \in (-\pi, \pi)$$

Odhadněte, jak bude vypadat aproximace při $\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \ldots}$

- Koeficient a_0

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{4\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Fourierova řada - příklad

- Koeficient a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\ t\ \mathrm{d}t$$

- Per-partes pro určité integrály

$$\int_a^b u\,v' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Fourierova řada - příklad

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = \cos(nt) & u = \int \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sin(nt) \\ & \\ v = t & v' = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{t}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n^2}[-1+1] = 0$$

Fourierova řada - příklad

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left|\begin{array}{cc} u' = \sin(nt) & u = \int \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\cos(nt) \\ \\ v = t & v' = 1 \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{2}{n}\cos(n\pi)$$

Fourierova řada - příklad

$$b_n = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = \begin{vmatrix} n = 0 & \cos(0\pi) = 1 \\ n = 1 & \cos(\pi) = -1 \\ n = 2 & \cos(2\pi) = 1 \\ n = 3 & \cos(3\pi) = -1 \\ n = 4 & \cos(4\pi) = 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$a_0 = 0$$
$$a_n = 0$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nt) = t$$

Fourierova řada - příklad

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nt) = t$$

$n = 1$ $$f(t) \approx b_1 \sin(t) \approx 2\sin(t)$$

$n = 2$ $$f(t) \approx 2\left(\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2}\right)$$

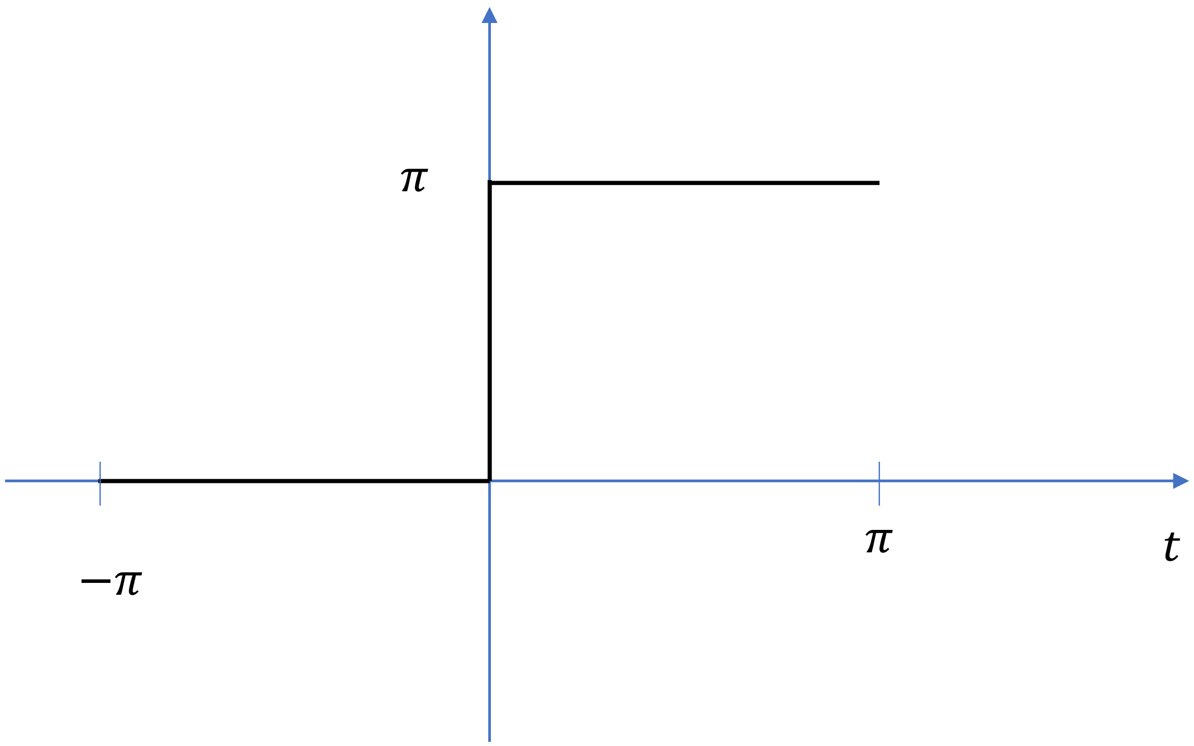
$n = 3$ $$f(t) \approx 2\left(\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3}\right)$$

- **Vykreslete konvergenci funkce $f(t)$ v závislosti na počtu členů řady n.**
- **Vypočítejte kvalitu aproximace a ukažte, že s rostoucím n je aproximace lepší.**

Fourierova řada - příklad samostudium

- Pomocí Fourierovy řady aproximujte průběh funkce:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi \le t \le 0 \\ \pi & 0 \le t \le \pi \end{cases}$$



Literatura

[1] Jiří Jan, *Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů,* VUT v Brně nakladatelství VUTIUM, 2002, ISBN 80-214-1558-4.

[2] Jiří Krejsa, Základ zpracování signálu, [cit. 2019-01-17] , dostupné z: https://docplayer.cz/24302145-Zaklady-zpracovani-signalu.html.

[3] Willard Miller, The Fourier Transform, [cit. 2019-01-17], dostupné z: http://wwwusers.math.umn.edu/~mille003/fouriertransform.pdf

[4] [cit. 2019-01-17], Dostupné z: http://apfyz.upol.cz/ucebnice/down/mini/fourtrans.pdf.