Analýza a vizualizace dat v Matlabu

Kumulační a korelační techniky

Signal Processing Toolbox, Matlab R2013a

RNDr. Zbyšek Posel, Ph.D.

Katedra informatiky, PřF, UJEP

Obsah

- Operace se signály – opakování
  - Amplitudová a fázová modulace
  - Generován obdélníkového a pilového signálu
- Šum v signálu
  - Povaha šumu
  - Techniky pro odstranění šumu
- Kumulační techniky posílení signálu v šumu
  - Princip metody
  - Kumulace s rovnoměrnými váhami
  - Okénková kumulace
- Náhodné procesy a korelační techniky
  - Náhodné signály-procesy
  - Princip korelace a autokorelace

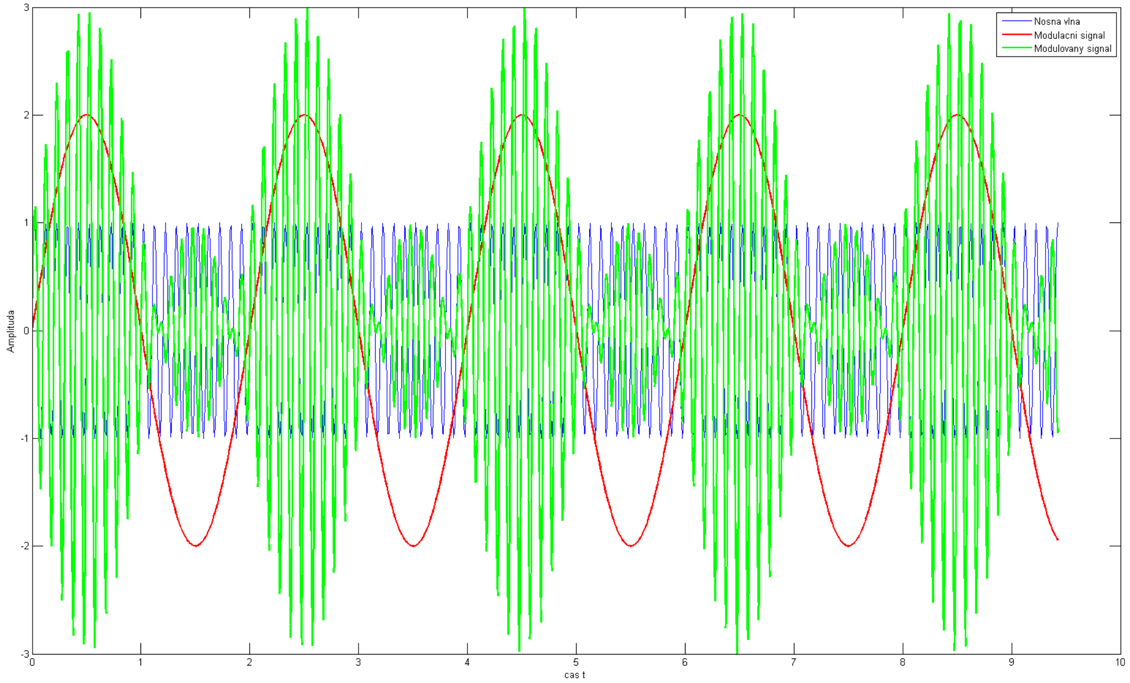
Více lze o těchto tématech nalézt v [1] a [2].

Operace se signály - Amplitudová modulace

- Nosný signál: $f(t) = A_0 \sin(\omega t)$
- Modulační signál: $m(t) = M \sin(\varphi t + \xi)$
  - ξ fáz.posun vúči nosné vlně
- Amplitudová modulace
  - $A = A_0 + m(t)$
  - $y(t) = (A_0 + M \sin(\varphi t + \xi))\sin(\omega t)$

Operace se signály - Modulace signálu

- Amplitudová modulace s plnou nosnou vlnou



Operace se signály - Frekvenční a fázová modulace

- Frekvenční modulace
  - Nosný signál: $f(t) = A_0 \sin(\omega(t)t + \xi)$
  - Modulační signál: $\omega(t) = \omega + \Delta\omega \cos(\varphi t)$
    - $\Delta\omega$ – frekvenční zdvih
- Fázová modulace
  - Nosný signál: $f(t) = A_0 \sin(\omega_c t + \xi_c)$
  - Modulační signál: $m(t) = M \sin(\omega_m t + \xi_m)$
  - Modulovaný signál: $y(t) = C \sin(\omega_c t + m(t) + \xi_c)$

Operace se signály – generování signálů

- Generování obdélníkového a pilového signálu

- Pomocí funkcí Matlabu

Šum v signálu

- Povaha a vznik šumu
  - Poruchy přístroje
  - Zdroje el. napětí, vibrace
  - Biologické zdroje – dýchání, pohyb,…
  - ….

- Vysokofrekvenční šum
- Nízkofrekvenční šum
- Šum typu pepř a sůl
- Aditivní šum

Kumulační techniky posílení signálu v šumu

- Periodický signál s aditivním šumem

$$x(t_i) = x^0(t_i) + \gamma(t_i)$$

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t \rightarrow t_i = k; k = 1..N$$

$$x_k = x_k^0 + \gamma_k$$

$$\langle \gamma_k \rangle_N = 0; \langle x_k^0 \gamma_k \rangle_N = 0$$

Kumulační techniky posílení signálu v šumu

- Periodický signál s aditivním šumem

$$x_k = x_k^0 + \gamma_k \rightarrow k = m_i T + l$$

- m_i - počátek i-té periody signálu; $i = 1, .., M$
- $l = 1, .., n$ – pozice l-tého vzorku v rámci periody m_i

$$x_{m_i T + l} = x_{m_i T + l}^0 + \gamma_{m_i T + l}$$

$$m_i = 1, .., M$$
$$l = 1, \dots, n$$

Kumulační techniky posílení signálu v šumu

- Periodický signál s aditivním šumem

$$x_{m_iT+l} = x^0_{m_iT+l} + \gamma_{m_iT+l}$$

- Kumulace vzorků v rámci jedné periody - rovnoměrné váhy

$$x_l = \sum_{i=1}^{M} a_i x_{m_iT+l} \rightarrow a_i = \frac{1}{M}$$

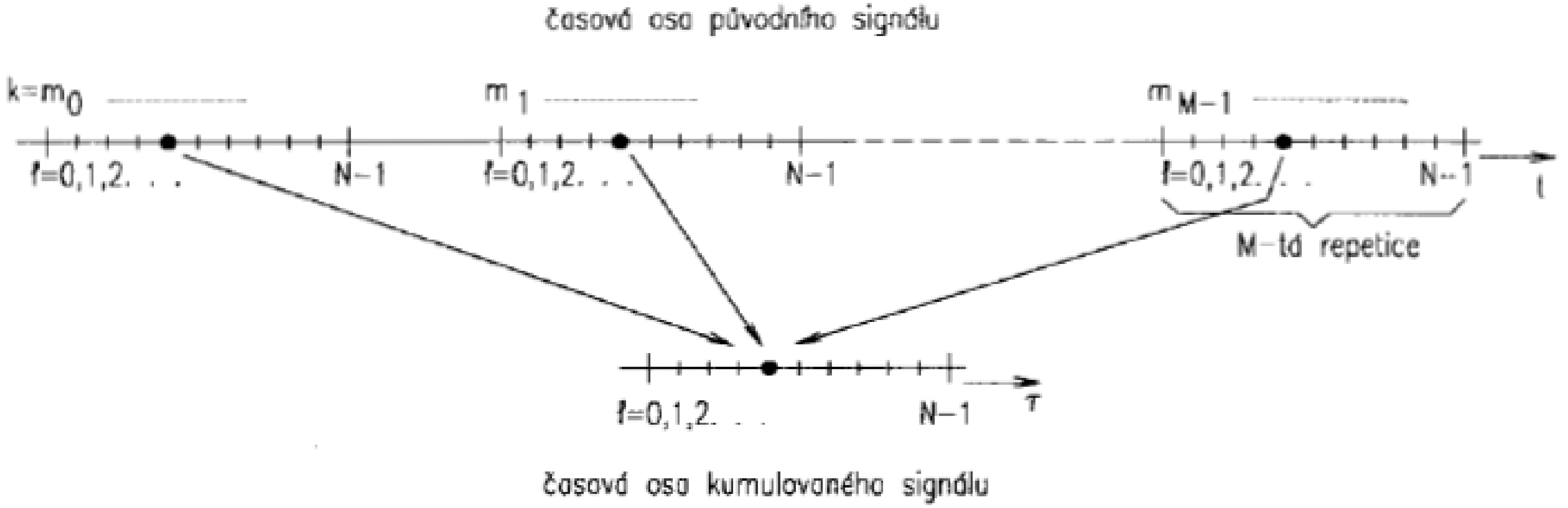
Kumulační techniky posílení signálu v šumu

- Kumulace vzorků v rámci jedné periody - rovnoměrné váhy

- Pevné okno – počet vzorků M.
- Váha a_i je volena tak, aby se zachovala původní úroveň signálu.
- Lze analyzovat výsledky po každé kumulaci.
- Zlepšení hodnotového poměru signálu k šumu K_{x}.

$$x_l = \sum_{i=1}^{M} a_i x_{m_i T+l} \rightarrow a_i = \frac{1}{M}$$

$$K_x = \frac{\sum_{i=1}^{M} a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{M} a_i^2}} = \sqrt{i+1}$$



Kumulační techniky posílení signálu v šumu

- Kumulace vzorků v rámci jedné periody - okénková kumulace

$$x_l = \sum_{i=1}^{M} a_i x_{m_i T + l} \rightarrow a_i = \begin{cases} \dfrac{1}{M} & i = 1, \dots, M \\ 0 & i > M \end{cases}$$

- Šířka okna je dána počtem vzorků $M < M_{max}$
- Všechny vzorky mají stejnou váhu

Kumulační techniky posílení signálu v šumu

- Kumulace vzorků v rámci jedné periody - exponenciální kumulace

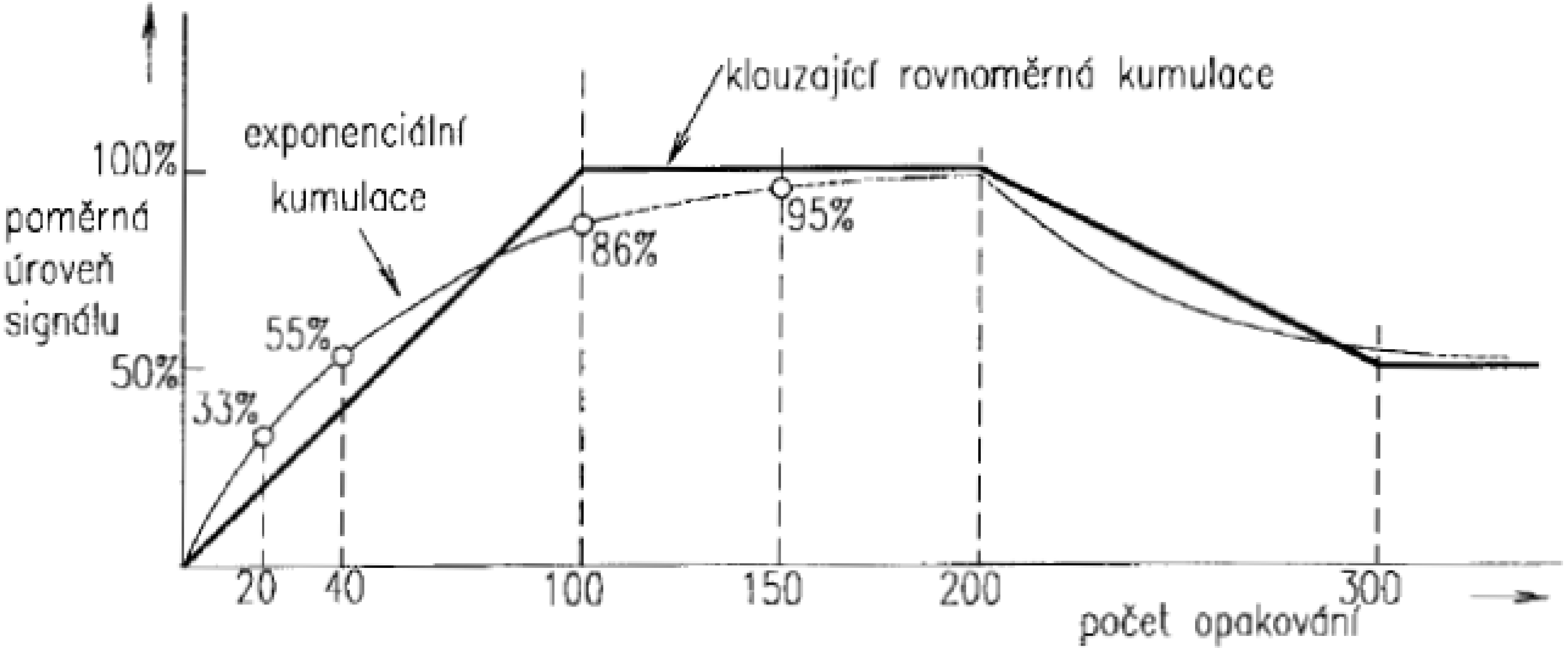
$$x_l = \sum_{i=1}^{M} a_i x_{m_i T+l} \rightarrow a_i = q^i; i = 1,2,\dots$$

- Význam starších vzorků klesá, postupné „zapomínání“

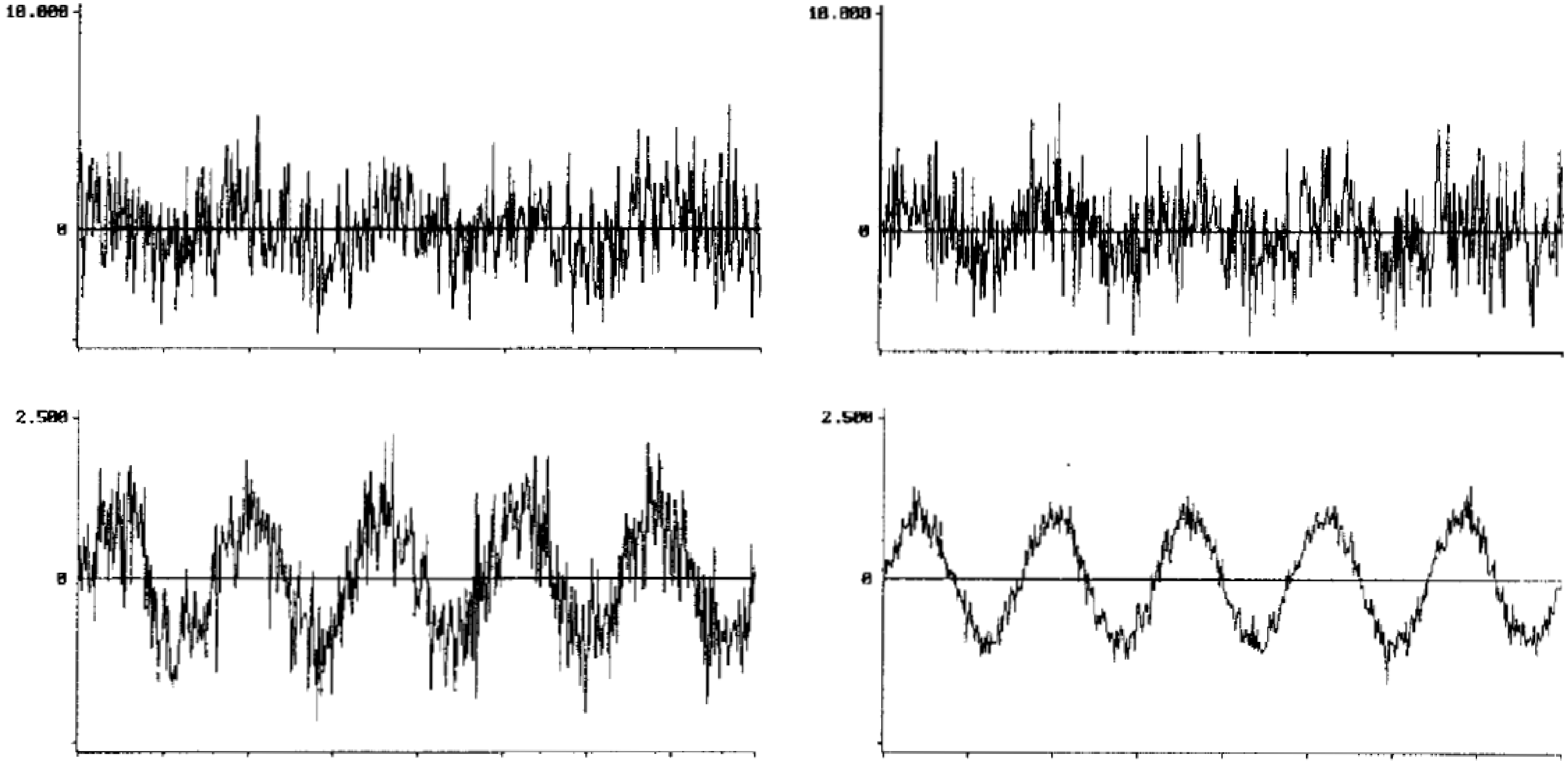
- Relace s okénkovou kumulací

$$q = \frac{M-1}{M+1}$$

Kumulační techniky posílení signálu v šumu



Kumulační techniky posílení signálu v šumu



Kumulační techniky posílení signálu v šumu

- Nagenerujte periodický signál s aditivní složkou šumu s *M* periodami

$$x(t_i) = x^0(t_i) + \gamma(t_i)$$
$$\langle \gamma_k \rangle_N = 0; \left\langle x_k^0 \gamma_k \right\rangle_N = 0$$

- Proveďte potlačení šumu pomocí kumulační techniky
  - S pevným oknem
  - S klouzavým oknem
  - S exponenciálními váhami
- Porovnejte jednotlivé techniky z hlediska
  - koeficientu poměru zesílení signálu k šumu K_x.
  - Rozptylu původního signálu x_k^0 a kumulovaného signálu x_k

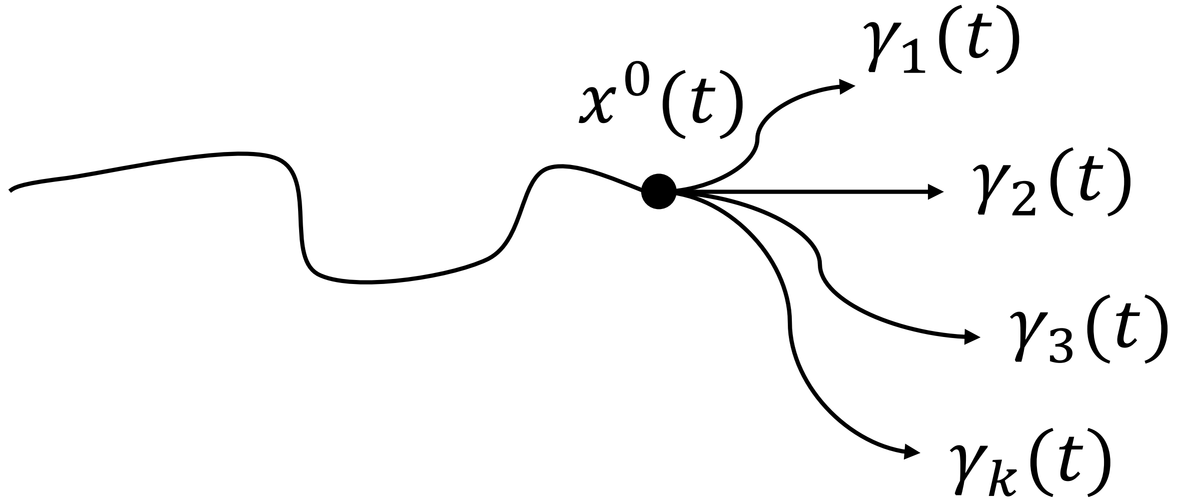
Náhodné procesy a korelační techniky

- Náhodný proces

$$x(t) = x^0(t) + \gamma(t)$$

- Deterministický signál: $x^0(t)$

- Realizace náhodného procesu



$$\gamma(t) \in \{\gamma_k(t)\}, k = 1, .., \infty$$

- Distribuční funkce $P_\gamma(z, k) = P\{\gamma_k \leq z\}$
- Nabývá diskrétních hodnot !

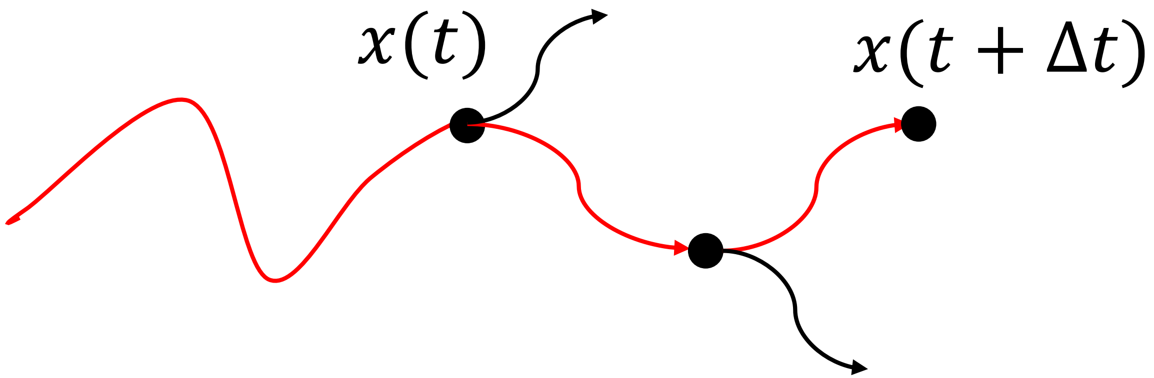
Brownův pohyb
Rozpad částic – generátor
Rozhodování
.....

Náhodné procesy a korelační techniky

- Jak spolu souvisí hodnoty $x(t)$ a $x(t + \Delta t)$?

$$x(t) = x^0(t) + \gamma(t)$$

$$x(t + \Delta t) = x^0(t + \Delta t) + \gamma(t + \Delta t)$$



$$\langle x(t)x(t + \Delta t)\rangle = ?$$

$$\langle \gamma(t)\gamma(t + \Delta t)\rangle = 0$$

$$\langle x(t)\gamma(t + \Delta t)\rangle = ?$$

$$\langle x(t + \Delta t)\gamma(t)\rangle = ?$$

Náhodné procesy a korelační techniky

- Výpočet korelace v signálu $x(t) \rightarrow x_k$
  - Dosah korelační funkce $\tau = n\Delta t = ik, i = 1, .., n$
  - n – počet vzorků v korelační funkci
  - k- index vzorku signálu

$$C(m,l) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i(m)x_i(l)$$

Náhodné procesy a korelační techniky

- Výpočet kovariance v signálu $x(t) \rightarrow x_k$
  - Dosah korelační funkce $\tau = n\Delta t = ik, i = 1, . . , n$
  - n – počet vzorků v korelační funkci
  - k- index vzorku signálu

$$K(m,l) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i(m) - \mu(m))(x_i(l) - \mu(l))$$

  - μ – lokální střední hodnota

Náhodné procesy a korelační techniky

- Výpočet (auto)korelace v signálu $x(t) \rightarrow x_k$

$$C(m,l) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i(m)x_i(l)$$

- Výpočet kovariance v signálu $x(t) \rightarrow x_k$

$$K(m,l) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} (x_i(m) - \mu(m))(x_i(l) - \mu(l))$$

Korelační analýza

- vztah dvou náhodných veličin
  - Dosah korelační funkce $\tau = n\Delta t = ik, i = 1,..,n$

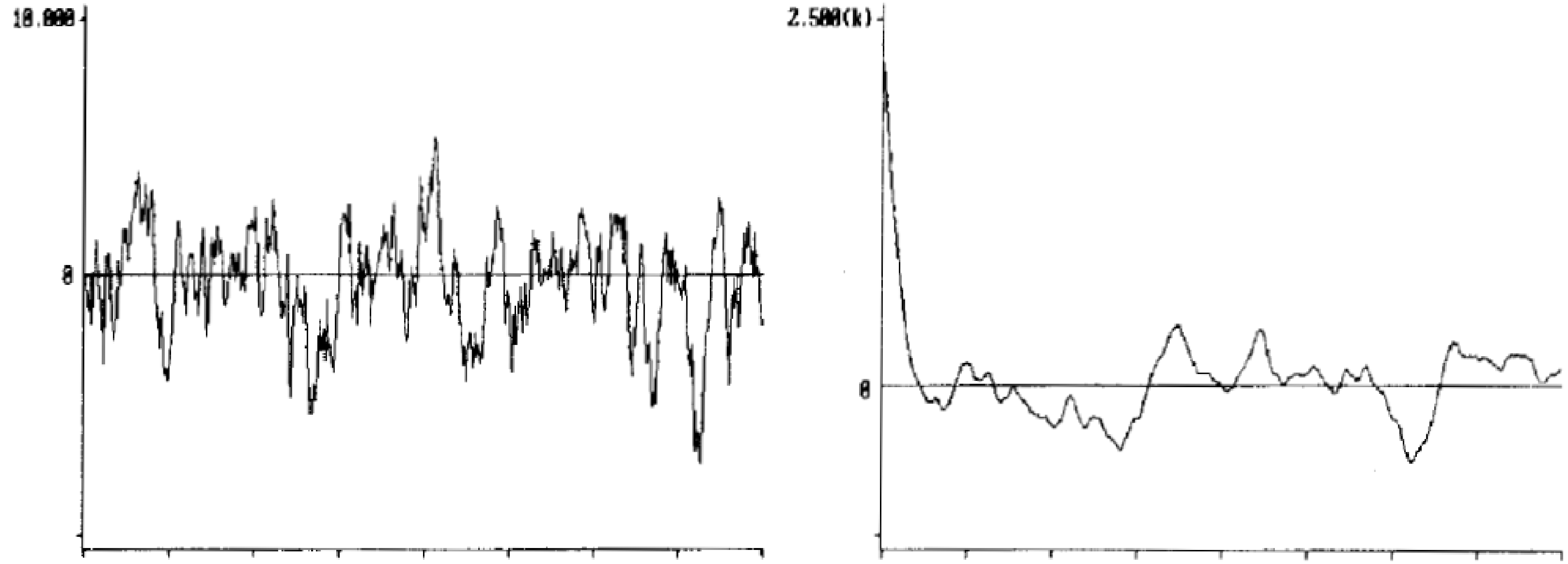
$$C(m,l) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i(m)x_i(l)$$

$$C(\tau) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i(m)x_i(m+\tau)$$

Korelační analýza

- vztah dvou náhodných veličin
  - Dosah korelační funkce $\tau = n\Delta t = ik, i = 1,..,n$

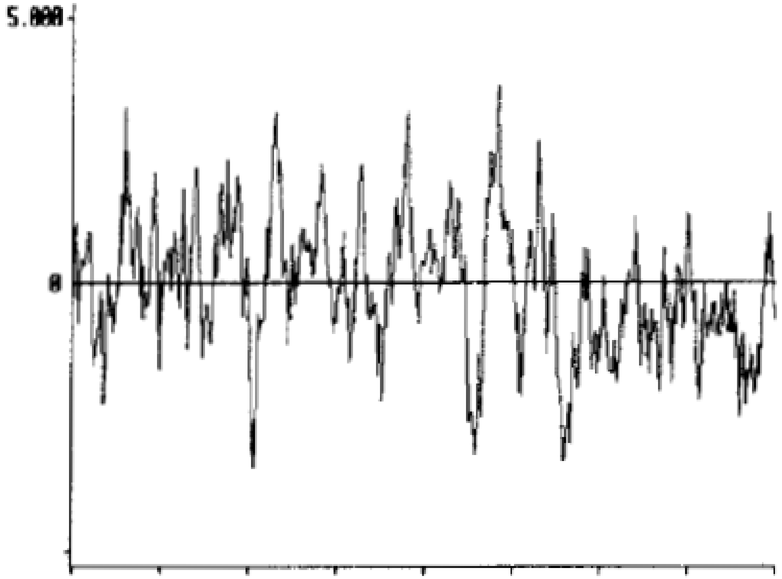
$$C(\tau) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i(m)x_i(m+\tau)$$

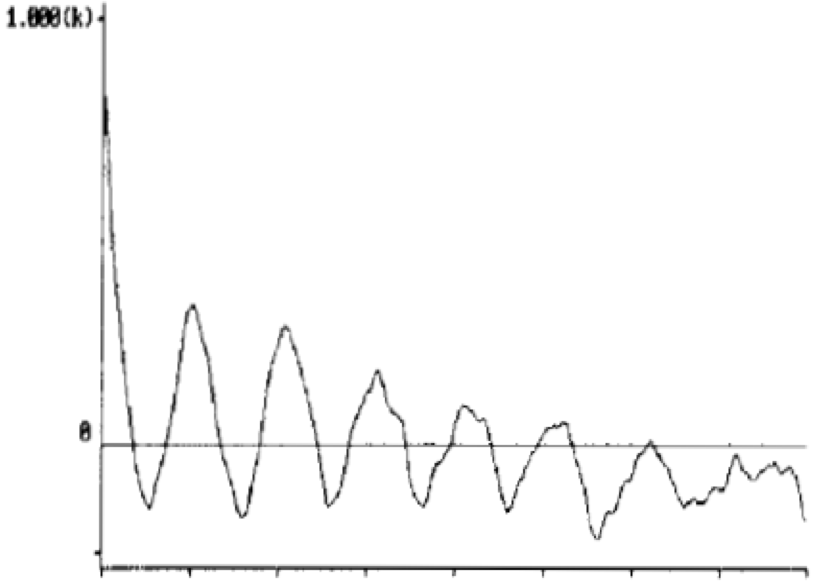


Korelační analýza

- vztah dvou náhodných veličin
  - Dosah korelační funkce $\tau = n\Delta t = ik, i = 1, .., n$

$$C(\tau) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i(m)x_i(m+\tau)$$





Korelační analýza

- Nagenerujte periodický signál s aditivní složkou šumu s *M* periodami

$$x(t_i) = x^0(t_i) + \gamma(t_i)$$
$$\langle \gamma_k \rangle_N = 0; \left\langle x_k^0 \gamma_k \right\rangle_N = 0$$

- Proveďte korelační analýzu a odhadněte periodu signálu $x^0(t)$
- Zjistěte vliv:
  - délky korelační funkce τ na kvalitu odhadu periody
  - Velikosti šumu na kvalitu odhadu periody
- Korelační analýzu proveďte také na pilový a obdélníkový signál

Literatura

[1] Jiří Jan, *Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů,* VUT v Brně nakladatelství VUTIUM, 2002, ISBN 80-214-1558-4.

[2] Sophocles J. Orfanidis, *INTRODUCTION TO Signal Processing*, Prentice-Hall, Inc., 2009, ISBN 0-13-209172-0.