Katedra informatiky
Přírodovědecká fakulta UJEP

Zadání 2. seminární práce z předmětu Matematický software (KI/MSW)

Vyučující: RNDr. Zbyšek Posel, Ph.D.

Informace

- Seminární práce se skládá z **programové** části a **textové** části.
- Programová část obsahuje kódy v jazyce Matlab.
- Textová část je protokol o vypracování a minimálně obsahuje:
  - Zadání
  - Postup řešení, zjednodušenou verzi programu nebo vývojový diagram a rovnice.
  - Výsledky (grafy, tabulky, obrázky). Všechny grafy budou mít popsané osy a legendu.
  - Slovní zhodnocení výsledků, diskuze a závěr.
  - Literaturu.
- Na programové části je povolená spolupráce.
- Protokol odevzdá každý sám za sebe.
- Seminární práci posílejte na Zbysek.Posel@ujep.cz.
- Seminární práci lze odevzdat nejpozději dne 9. 2. 2019. Po tomto datu nebudou již žádné práce ani jejich opravy přijímány.

Šíření nemoci - SIR model

Pro modelování šíření nemoci v populaci o N členech zanedbáváme ty faktory populace, které nejsou pro vývoj a šíření nemoci zásadní. Populaci dělíme na 3 skupiny:

- $S(t)$ - Ti, co nejsou nakažení, ale mohou se jimi stát kontaktem s infikovanou osobou.
- $I(t)$ - Ti, co jsou nakažení a mohou nakazit i členy skupiny $S(t)$. V $t = 0$ bude počet těchto členů malý a bude růst, protože například lidé nejsou o nemoci informování nebo nejsou tak opatrní.
- $R(t)$ - Ti, co se z nemoci vyléčili a už nemůžou být nakažení nebo jsou nakažení a v karanténě nebo zemřeli.

Celkový počet členů populace je konstantní a platí

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2}$$

Přechod mezi jednotlivými skupinami je zohledněn v následujících rovnicích:

(a) Časový vývoj skupiny potenciálně nakažených $S(t)$ v závislosti na kontaktu se skupinou nakažených $I(t)$ je vyjádřen jako časový úbytek počtu členů skupiny $S(t)$

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta S(t)I(t) \tag{3}$$

Koeficient β vyjadřuje míru přenosu mezi jednotlivými skupinami.

(b) Časový vývoj skupiny nakažených $I(t)$ v závislosti na kontaktu se členy skupiny $S(t)$ (přírůstek) a přechodem do skupiny $R(t)$ (úbytek vyléčením, karanténou nebo úmrtím):

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \tag{4}$$

Koeficient γ vyjadřuje míru přenosu mezi skupinou nakažených a vyléčených.

(c) Časový vývoj skupiny vyléčených (+ karanténa a úmrtí) je vyjádřen jako přírůstek členů skupiny:

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma I(t) \tag{5}$$

Rovnice 3, 4 a 5 tvoří spolu s podmínkami 1 a 2 soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu. Rovnice představují uzavřenou soustavu, kde neuvažujeme přírůstek a pokles populace narozením reps. úmrtím nebo migrací.

Počáteční podmínky

Na počátku šíření nemoci $t = t_0 = 0$ jsou počty ve skupinách rozděleny následovně. Velký počet členů populace je ve skupině $S(t)$, potenciálně nakažených. Naopak malý počet je ve skupině již nakažených $I(t)$. Ve skupině vyléčených, v karanténě nebo zemřelých $R(t)$ není na počátku šíření nemoci nikdo. Počáteční podmínky lze shrnout

$$
\begin{aligned}
S(t_0) &= S_0 >> 0\\
I(t_0) &= I_0 > 0\\
R(t_0) &= R_0 = 0
\end{aligned}
$$

Vlastnosti SIR modelu a jeho použití

Výhody modelu jsou:

(a) Základní model pro šíření nemocí v uzavřené skupině. Byl použit pro modelování vývoje např. nemoci SARS, H1N1 a jiné.

(b) Model s konstantním počtem členů lze velice dobře použít pro modelování krátkodobých událostí.

(c) Model je relativně jednoduchý. Každý člen populace projde vývojem: potenciálně nakažený → nakažený → vyléčený.

Nevýhody tohoto modelu jsou:

(a) Koeficienty β a γ jsou konstantní v čase. Například je těžké modelovat sezónní nemoci.

(b) Populace není vnitřně rozdělena na dospělé a děti. Je těžké modelovat ty dětské nemoci, kdy se nakazí např. každý desátý dospělý.

(c) SIR model neumožňuje sledovat vývoj jiné populace, např. přenašeče nemocí jako jsou komáři (malárie) nebo klíšťata.

(d) SIR model je uzavřený, neuvažuje migraci.

Zadání práce

Pomocí vlastního programu vyřešte následující soustavu rovnic, která modeluje vývoj nemoci v uzavřené populaci o $N = 50$ členech.

- Uvažujte SIR model s následujícími rovnicemi a podmínkami.

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta S(t)I(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma I(t)$$

  a podmínkami

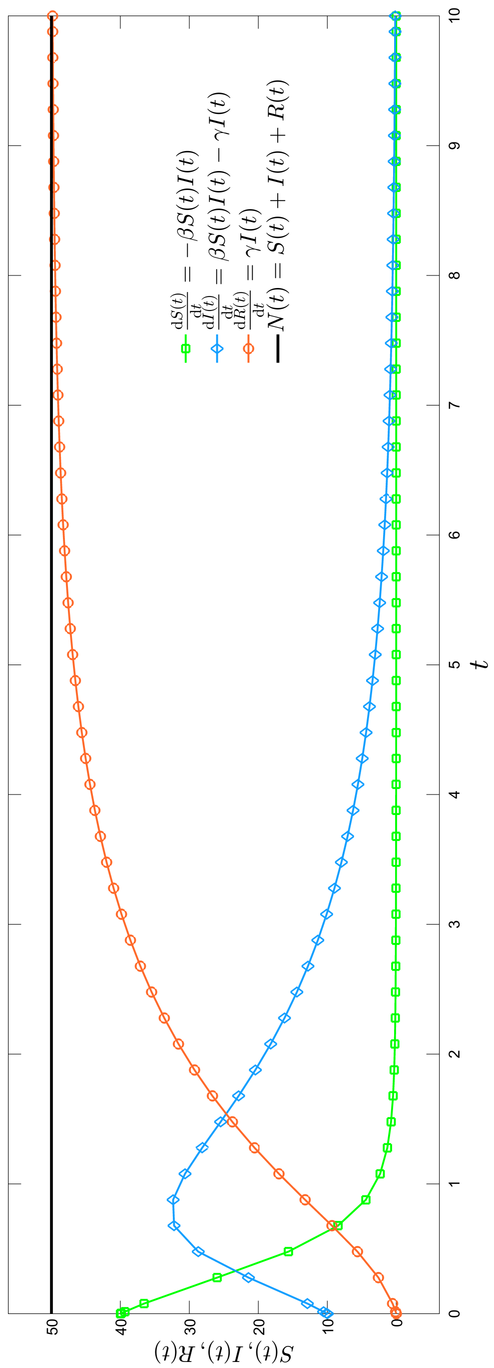
$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$
$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

- Ukažte vliv počátečních podmínek na časový vývoj jednotlivých skupin.
- Ukažte vliv koeficientů β a γ na časový vývoj jednotlivých skupin.
- Ukažte vliv metody řešení soustavy rovnic na přesnost řešení. Za metody zvolte Eulerovu metodu a metodu Rungeho-Kutty 4. řádu.

Výstupem bude:

- Grafické zobrazení průběhu nemoci, alespoň pro 3 skupiny parametrů. Např. pro případ malého nebo velkého počtu nakažených na počátku, při různých velikostech koeficientů β a γ.
- Porovnání stability a rychlosti jednotlivých řešení (Eulerova metoda a metoda Rungeho-Kutty 4.řádu). Jde například o graf časové náročnosti v závislosti na počtu členů populace, čase řešení aj.

Příklad formátovaného grafického výstupu



Obrázek 1: Výsledek SIR modelu pro šíření nemoci v populaci o velikosti $N = 50$ členů. Počáteční podmínky modelu jsou $S_0 = 40$, $I_0 = 10$ a $R_0 = 0$.