Zadání 2. Seminární práce z předmětu Matematika pro informatiky (KI/MAI)

Datum zadání:	23. 5. 2017
Podmínky vypracování:	- Seminární práce se skládá z **programové části** (kódy v Matlabu) a **textové části** (protokol o vypracování). - Každý student odevzdává práci sám za sebe. - Student si vybere nejméně jednu úlohu, kterou vypracuje. - Textová část seminární práce bude obsahovat: i) zadání, ii) postup řešení, případně zjednodušenou verzi programu (vývojový diagram), iii) výsledky (grafy, tabulky, atd..), iv) slovní zhodnocení, závěr, případně odkazy na literaturu, kterou student použil při tvorbě práce.
Datum odevzdání:	Nejpozději 2. 7. 2017 **Po tomto datu nebudu již žádné práce ani jejich opravy přijímat**.

Obyčejné diferenciální rovnice v Matlabu

1. **Dostřel děla**:

Z děla umístěného na pahorku ve výšce h_0 nad okolním terénem je pod úhlem vystřelena železná koule o poloměru r s úsťovou rychlostí v_0. Určete dráhu koule v rovině kolmé na terén a procházející osou hlavně. Při výpočtu uvažujte sílu odporu vzduchu $F_0 = c_x S \rho v^2$, kde c_x je konstanta zohledňující tvar a povrch koule, S je plocha průřezu koule, v je rychlost koule a ρ je hustota prostředí. Odporová síla směřuje vždy proti pohybu koule.

Pohybové rovnice:

Na železnou kouli působí kromě síly odporové také síla gravitační (F_g) a síla pohybová (F_p) daná počátečním impulsem při vystřelení. Pohyb železné koule budeme studovat nezávisle v ose x a y. Pro pohyb železné koule použijte Eulerovu a Eulerovu-Cromerovu metodu pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

a) Napíšeme rovnováhu sil v ose x a v ose y:

$$x: F_{px} + F_{0x} = 0$$

$$y: F_{py} + F_{0y} + F_g = 0$$

b) Rozepíšeme do diferenciálního tvaru

$$x: m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + c_x S \rho v_x^2 = 0$$

$$y: m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + c_x S \rho v_y^2 + mg = 0$$

c) Hmotnost m a čelní plochu koule S nahradíme poloměrem r a hustotou koule ρ_k.

$$\frac{S}{m} = \frac{\pi r^2}{\rho_k V} = \frac{3\pi r^2}{\rho_k 4\pi r^3} = \frac{3}{4\rho_k r}$$

d) Výsledné rovnice pak budou mít tvar

$$x: \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + c_x \rho \frac{3}{4\rho_k r} v_x^2 = 0$$

$$y: \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + c_x \rho \frac{3}{4\rho_k r} v_y^2 + g = 0$$

e) Rovnici druhého řádu převedeme na dvě rovnice prvního řádu pomocí následující substituce

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + c_x \rho \frac{3}{4\rho_k r} v_x^2 = 0$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + c_x \rho \frac{3}{4\rho_k r} v_y^2 + g = 0$$

Počáteční podmínky:

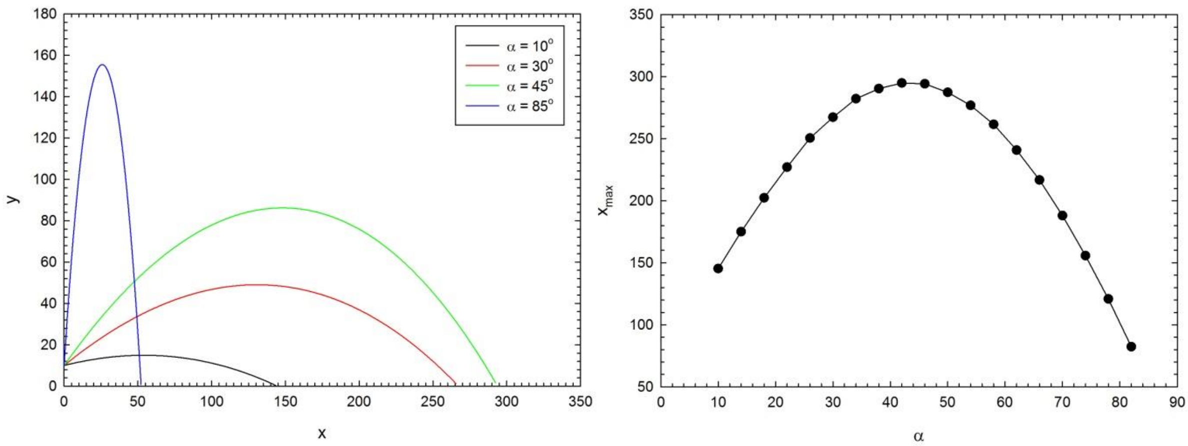
V následující tabulce najdete všechny potřebné parametry pro provedení simulace

Veličina	Jednotky	Hodnota	Význam
h_0	m	10.0	Výška děla nad terénem
v_0	m s^{-1}	1000.0	Počáteční rychlost střely
r	m	0.05	Poloměr projektilu
ρ	kg m^{-3}	1.2047	Hustota vzduchu
c_x	kg m^{-1}	0.26	Součinitel aerodynamického odporu
g	m s^{-1}	9.81	Gravitační zrychlení
ρ_k	kg m^{-3}	7800	Hustota projektilu (železo)
dt	s	0.04	Časový krok numerické metody

V čase t = 0 je počáteční rychlost určena rovnicemi $v_x(t=0) = v_0 \cos(\alpha)$ a $v_y(t=0) = v_0 \sin(\alpha)$. Počáteční poloha je potom určena $x(t=0) = 0$ a $y(t=0) = h_0$.

Výsledky

- Zjistěte úhel α_{max} , při kterém je dostřel děla maximální. Tedy $x = x_{max}$. Vykreslete výslednou trajektorii železné koule.
- Vykreslete závislost $x = x(\alpha)$ pro úhly z intervalu $\alpha \in (\pi/6, \pi/2)$. Interval rozdělte na 10 stejných dílků a zohledněte i α_{max}.



Obr. 1: Očekávané výsledky při nastavení v_0=100 ms^{-1}.

2. **Populační model typu lovec-kořist**:

Jde o jeden ze základních modelů popisujících dynamiku biologických systémů, kde se vzájemně ovlivňují dva druhy. **Lovce** bude reprezentovat populace lišek (F) a **kořist** bude reprezentovat populace králíků (B). Modelujte vývoj populace (vznik a úbytek) pomocí soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

Náznak odvození

Nejprve uvažujme, že existuje pouze populace lišek a žádná populace králíků. Lišky začnou vymírat a jejich úbytek v čase je reprezentován rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = -c_1 F$$

kde c_1 je rozdíl mezi narozením a úmrtím lišek.

Nyní uvažujme populaci králíků, když neexistuje populace lišek. Počet králíků bude růst a měnit se v čase jako

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = c_2 R$$

kde c_2 je rozdíl mezi narozením a úmrtím králíků.

Nyní uvažujme obě populace dohromady. Tedy Lišek bude přibývat úměrně tomu, jak bude ubývat králíků a opačně. Do obou rovnic potřebujeme dodat člen, který nám tento fakt zohlední.

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = -c_1 F + c_3 FR$$
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = c_2 R - c_4 FR$$

Výraz c_3FR bude s kladným znaménkem, protože lišek bude přibývat úměrně tomu, kolik množství jídla (králíků) bude k dispozici. Výraz c_4FR bude naopak záporný a vyjadřuje úbytek králíků za přítomnosti lišek.

Konstanty a počáteční podmínky:

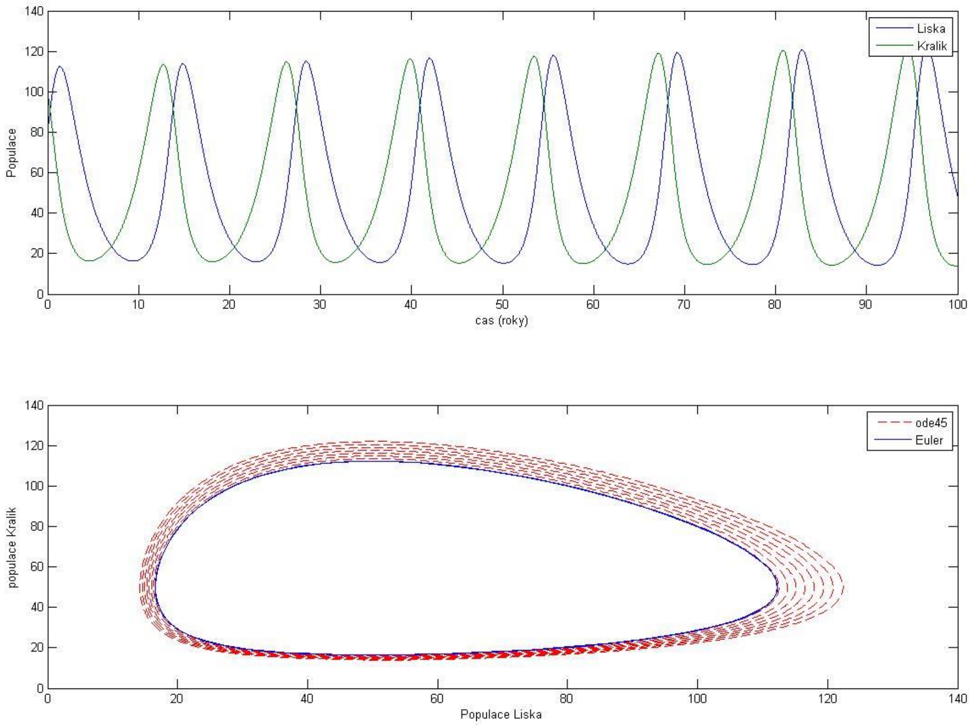
Proměnná	Hodnota
c_1	0.5
c_2	0.5
c_3	0.01
c_4	0.01
Počáteční populace lišek: *F(t=0)*	80
Počáteční populace králíků: *R(t=0)*	100
Čas, po který se bude soustava vyvíjet	t_{max}=200

Pro modelování vývoje počtu lišek a králíků využijte:

a) Matlab solver ode45
b) Eulerovu metodu s krokem *Δt*=0.01.
c) Metodu Rungeho-Kutty 4. řádu s krokem *Δt*=0.01.

Výsledky

- Do jednoho grafu vykreslete závislosti F(t) a R(t).
- Vykreslete vzájemnou závislost F a R.
- Porovnejte graf vzájemné závislosti pro ode45, Eulerovu metodu a metodu Rungeho – Kutty 4. řádu.



Obr. 2: Očekávané výsledky při použití nastavení ze zadání s krokem Eulerovy metody Δt=0.001.